Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence

Étudier la série de terme général u_n revient à étudier la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ des sommes partielles définie par :

$$\forall n \geq n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On notera plus simplement $\sum u_n$.

1 Séries convergentes ou divergentes

Définition 1 *On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.*

Exercice 1 *Montrer que la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.*

Théorème 1 *Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Théorème 2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs décroissante. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est-à-dire que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.*

Théorème 3 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et λ, μ deux scalaires.*

1. *Si ces deux séries convergent, il en est alors de même de la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu v_n$.*
2. *Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.*
3. *Si la série $\sum u_n$ converge, il en est de même de la série $\sum \overline{u_n}$, où $\overline{u_n}$ est le complexe conjugué de u_n et $\sum \overline{u_n} = \overline{\sum u_n}$.*

2 Séries alternées

Définition 2 *On dit qu'une série est alternée si son terme général est de la forme $u_n = (-1)^n \alpha_n$, où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de signe constant.*

Théorème 4 *Soit $\sum (-1)^n \alpha_n$ est une série alternée. Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ est convergente et une majoration des restes est donnée par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k \right| \leq \alpha_{n+1}.$$

3 Convergence absolue, semi-convergence

Définition 3 *On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Définition 4 *Une série numérique convergente, mais non absolument convergente est dite semi-convergente.*

Théorème 5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente et :*

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Théorème 6 *Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente. Pour tout réel S, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme S.*
On peut aussi trouver des permutation σ et σ' de $\mathbb{N}$ telles que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente vers $-\infty$ et la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente vers $+\infty$.

4 Séries à termes positifs

Théorème 7 *Une série à termes positifs* $\sum u_n$ *est convergente si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée. En cas de divergence, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Théorème 8 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs.*
S'il existe un entier n_0 *tel que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$$

alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum v_n < +\infty \Rightarrow \sum u_n < +\infty \\ \sum u_n = +\infty \Rightarrow \sum v_n = +\infty \end{array}\right.$$

Théorème 9 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs telles que* $u_n \backsim v_n$.

1. *Si* $\sum u_n$ *est convergente il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et les restes de ces séries sont équivalents, soit :*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \backsim R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

2. *Si* $\sum u_n$ *est divergente il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et les sommes partielles de ces séries sont équivalents, soit :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \backsim T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Théorème 10 (Cauchy) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles positives telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$.
La série $\sum u_n$ *est convergente pour* $\lambda < 1$ *et divergente pour* $\lambda > 1$.

Théorème 11 (d'Alembert) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles strictement positives telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.
La série $\sum u_n$ *est convergente pour* $\lambda < 1$ *et divergente pour* $\lambda > 1$.

5 Produit de deux séries

Définition 5 *Étant données deux séries numériques* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$, *le produit de Cauchy de ces deux séries est la série de terme général* $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème 12 *Le produit de Cauchy* $\sum w_n$ *de deux séries numériques* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *absolument convergentes est absolument convergent et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

6 La transformation d'Abel

Théorème 13 (Abel) *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui tend vers* 0 *en décroissant et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes telle que la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

soit bornée. Dans ces conditions la série $\sum u_n\alpha_n$ *est convergente et, en désignant par* $M > 0$ *un majorant de la suite* $(|A_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, *on a les majoration des restes :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_{n+1}| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k u_k\right| \leq 2M u_{n+1}.$$

Théorème 14 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs.*

1. *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors la série* $\sum u_n e^{int}$ *est absolument convergente pour tout réel* t.
2. *Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0 *en décroissant, alors la série* $\sum u_n e^{int}$ *est convergente pour tout réel* $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 15 (Abel) *Soient et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suite de nombres complexes telles que la série* $\sum \alpha_n$ *soit convergente et la série* $\sum (u_{n+1} - u_n)$ *absolument convergente.*
Dans ces conditions la série $\sum \alpha_n u_n$ *est convergente.*